SUR LA VIBRATION DES CORDES,

PAR M. EULER.

Traduit du Latin.

I.

QUoique tout ce que *Mrs. Taylor*, *Bernoulli*, & quelques autres, ont dit & découvert jusqu'à preſent au ſujet du mouvement vibratoire des cordes, ſemble avoir épuiſé la matiere, il y reſte néanmoins une double limitation, qui la reſtreint tellement, qu'à peine y a-t-il aucun cas, où l'on puiſſe déterminer le veritable mouvement d'une corde en vibration. Car d'abord, ils ont ſuppoſé que les cordes tenduës faiſoient ſeulement des vibrations quaſi infiniment petites, en ſorte que dans ce mouvement, la corde, ſoit qu'elle ait une ſituation droite, ou courbe, peut pourtant être cenſée conſerver toujours la même longueur. L'autre limitation conſiſte, en ce qu'ils ont ſuppoſé toutes les vibrations régulieres, prétendant que dans chaque vibration la corde entiére, & tout à la fois, s'etend directement, & cherchant hors de cette ſituation ſa figure courbe, qu'ils ont trouvé être une trochoïde prolongée à l'infini.

II. A' la verité la premiere limitation, par laquelle les vibrations de la corde ſont regardées comme infiniment petites, quoique réellement elles conſervent toujours une raiſon finie à la longueur de la

corde, cela ne dérange presque en rien les conclusions qu'on en tire, parce qu'en effet ces vibrations sont pour l'ordinaire si petites, qu'elles peuvent être prises pour infiniment petites, sans qu'il en résulte d'erreur sensible. D'ailleurs on n'a pas encore poussé assez loin, ni la Mechanique, ni l'Analyse, pour être en état de déterminer les mouvemens dans les vibrations finies. A l'egard de l'autre limitation, qui suppose toutes les vibrations régulieres, on tâche de la défendre en disant, que bien qu'elles s'ecartent de cette loi au commencement du mouvement, elles ne laissent pas de s'assujettir au bout d'un trés court espace de tems à l'uniformité, de sorte qu'à chaque vibration la corde s'étend tout à la fois, & ensemble en ligne droite, affectant hors de cette situation la figure d'une trochoïde prolongée.

III. Il est effectivement prouvé d'une maniere suffisante, que si une seule vibration est conforme à cette régle, toutes les suivantes doivent l'observer aussi, On voit en même tems par là, comment l'etat des vibrations suivantes dépend des précedentes, & peut être déterminé par elles; comme réciproquement, par l'etat des suivantes, on peut conclure la disposition de celles qui ont precedé. C'est pourquoi, si les vibrations suivantes sont régulieres, il ne sera en aucune maniere possible que les précedentes se soient écartées de la régle; d'où résulte aussi évidemment, que si la premiere vibration a été irréguliere, les suivantes ne peuvent jamais parvenir à une parfaite régularité. Or la premiere vibration dépend de notre bon plaisir, puisqu'on peut, avant que de lacher la corde, lui donner une figure quelconque; ce qui fait que le mouvement vibratoire de la même corde peut varier à l'infini, suivant qu'on donne à la corde telle ou telle figure au commencement du mouvement.

IV. De là naît donc la Question suivante, dans laquelle toute cette recherche est comprise.

Si une corde d'une longueur, & d'une masse donnée, est tenduë par une force, ou un poids donné; qu'au lieu de la situation droite, on lui donne une figure quelconque, qui ne differe cependant de la droite qu'infiniment peu, & qu'ensuite on la lache tout à coup; déterminer le mouvement vibratoire total, dont elle sera agitée,

M. d'A-

M, d'Alembert s'eſt attaché le premier, avec un ſuccés des plus heureux, à l'examen de ce Problême, ſi difficile tant dans la Mecanique que dans l'Analyſe, & il en a communiqué à notre Academie une trés belle ſolution. Mais, comme dans ces diſcuſſions ſublimes on tire ſouvent un fruit fort conſiderable de la comparaiſon de pluſieurs ſolutions différentes du même problême, je ne balance point à propoſer celle que j'ai trouvée ſur cette queſtion. Quoiqu'elle ne differe pas beaucoup de celle de M. d'Alembert; cependant la grande étenduë de ce ſujet fait que je me perſuade d'avoir ajouté quelques obſervations aſſez intereſſantes dans l'application des formules générales.

V. Je commencerai donc par propoſer le Problême d'une façon bien nette, afin qu'il paroiſſe quels ſecours on a beſoin de tirer, tant de l'Analyſe que de la Mecanique, pour arriver à la ſolution. Soit donc la corde propoſée A B, fixement attachée à ſes extremités A & B, & tendüe ſuivant la direction A F par une force quelconque, comme cela ſe fait ordinairement dans les Inſtrumens de Muſique. Fig. 1. Que cette corde ſoit partout d'une égale épaiſſeur, & qu'on appelle

ſa longueur A B = a

ſa maſſe, ou ſon poids = M

& que la force tendante A F ſoit égale à un poids = F. Fig. 1.

Qu'alors on faſſe paſſer cette corde de ſon état naturel A B à un etat de courbure quelconque A L / B, qui pourtant ne differera qu'infiniment peu de l'etat naturel droit A B, de maniere que la longueur A L / B ne ſurpaſſe pas ſenſiblement la longueur A B; & que cette figure A L / B donnée d'abord à la corde, ſoit connüe. On demande, en ſuppoſant que la corde ſoit lachée ſubitement de cet état, quel mouvement elle aquerra, & quelles ſeront les vibrations qu'elle ſera?

VI. Auſſi-tot donc que la corde ſera lachée de ſon etat A L / B, la force tendante la preſſera d'abord vers la ſituation naturelle A B, que tous ſes points atteindront, ou à la fois, ou en divers momens: par conſéquent, la corde changera continuellement de figure, & tous ſes points participeront au mouvement vibratoire, jusqu'à ce que la réſiſtan-

réſiſtance ait calmé toute l'agitation. Or pour connoître parfaitement en quoi conſiſte ce mouvement, il ſuffira d'avoir aſſigné pour chaque tems l'etat de la corde, c'eſt à dire, ſa figure. Car, tandis que d'un coté on définit le changement de figure par la ſucceſſion inſtantanée, on détermine en même tems de l'autre la viteſſe de chaque point de la corde, & ainſi on parvient à la connoiſſance de tout le mouvement. Il ne ſera donc pas beſoin dans cette recherche de faire attention aux vîteſſes de chacun des points de la corde; ce qui diminuë conſidérablement la difficulté de cette ſolution.

VII. Puisque nous avons ſuppoſé, que la longueur de la corde ne ſouffre aucun changement, tandis qu'elle revêt ſucceſſivement toutes ces figures, en ſorte que $AL/B = AB$, il en réſulte qu'en menant les appliquées quelconques PL, pl, normales à l'axe AB, les arcs AL, Al ſeront égaux aux abſciſſes AP, Ap; & par conſéquent les appliquées PL, pl, ſeront comme infiniment petites à l'egard des abſciſſes. Par conſéquent, ſi l'on appelle l'abſciſſe $AP = x$, l'appliquée PL ſera infiniment petite en comparaiſon de x, & l'arc même AL ſera $= x$; d'où l' on aura $Pp = Ll = dx$. Cela fait comprendre, que lorsque la corde reçoit diverſes figures ſucceſſives, chacun de ſes points L ſe meut perpetuellement ſelon la direction de l'appliquée LP, en ſorte que chaque appliquée LP repréſente le chemin, par lequel le point L de la corde s'approche de l'etat naturel AB: mais alors, à cauſe du mouvement reçu, ſuivant la même direction normale à AB, il tendra du coté oppoſé.

VIII. Aprés avoir fait ces remarques, poſons qu'au bout du tems t la corde ſoit arrivée à la ſituation AMmB, ayant quitté ſa ſituation primitive AL/B, de ſorte que le point L ſoit parvenu en M. En ſuppoſant donc l'abſciſſe quelconque $AP = x$, qui exprime en même tems la longueur de l'arc AM, ſoit l'appliquée dans cette courbe AMB répondante à $PM = y$; & parce que cette courbe AMB dépend du tems écoulé $= t$, y ſera une fonction des deux variables x & t; en ſorte qu'en poſant $t = o$, la valeur de y fourniſſe l'appliquée de la courbe primitive ALB. Or il eſt clair que ſi l'on connoit la nature de cette fonction de x & t, qui exprime la quantité de l'appliquée

y, on

y, on peut par ſon moyen aſſigner la figure même de la corde pour un tems quelconque t; & de plus on conclura aiſément de la mutabilité le mouvement de toute la corde.

IX. Ainſi y etant une fonction de x & t, ſon differentiel aura une forme telle, $dy = p\,dx + q\,dt$, laquelle formule comprend non ſeulement la variabilité de y par la courbe AMB, mais encore eu égard au tems qui s'ecoule. En effet, ſi le tems t eſt etabli conſtant, ou $dt = 0$, l'equation $dy = p\,dx$ exprimera la nature de la courbe AMB; mais ſi l'abſciſſe x eſt ſuppoſée conſtante, ou $dx = 0$, l'equation $dy = q\,dt$ définira le mouvement du point L pour tout le tems que le mouvement de la corde dure, parce que par elle on peut aſſigner pour un tems quelconque t ecoulé depuis le commencement, le lieu M, auquel le point L ſera parvenu. Or p & q ſeront de nouveau des fonctions de x & t, dont les differentiels, en poſant x & t l'une & l'autre variable, ſoient,

$$dp = r\,dx + s\,dt \;\&\; dq = s\,dx + u\,dt.$$

Car il eſt conſtant par la nature des differentiels, que l'element dt en dp, & l'element dx en dq, doivent avoir un coëfficient commun.

X. Comme il s'agit préſentement de déterminer le mouvement de la corde par les forces ſollicitantes, ſoit la force acceleratrice, par laquelle le point M de la corde eſt acceléré vers l'axe AB = P, & il eſt clair que toutes ces forces, par leſquelles chacun des élemens de la corde eſt preſſé vers l'axe AB. priſes enſemble doivent être équivalentes à la force, par laquelle la corde eſt actuellement tenduë, & que nous avons poſée AF = F; ou bien, ſi nous concevons des forces contraires & égales à P, appliquées ſuivant ML dans chacun des points M de la corde, alors elles devront ſe trouver en équilibre avec la force qui tend la corde AF = F, & par cette proprieté on pourra déterminer la veritable force acceleratrice P, par laquelle chaque élément Mm de la corde eſt actuellement ſollicité.

XI. La maſſe, ou le poids de toute la corde etant = M, & ſe diſtribuant également par toute la longueur AB, le poids de la portion AP, ou AM, ſera $= \frac{Mx}{a}$, & par conſéquent le petit poids de

l'élément $Mm = dx$ ſera $= \frac{M\,dx}{a}$; lequel etant ſollicité ſuivant ML par la force accélératrice $= P$, la force motrice de cet élément ſera $= \frac{M\,dx}{a} P$, & la ſomme de toutes les forces motrices par l'arc AM ſera $= \frac{M}{a} \int P\,dx$. Mais parce que le point A eſt ſuppoſé fixe, il eſt permis de concevoir une certaine force $AG = G$, qui lui ſoit appliquée dans la direction AG normale à AB, & aſſez grande, pour que le point A ſoit conſervé en repos. Ces choſes etant poſées, la theorie de l'equilibre des forces appliquées à un fil parfaitement fléxible, fournira l'equation ſuivante :

$$Fy - Gx + \frac{M}{a} \int dx \int P\,dx = o$$

ou Fy & Gx ſont les momens des forces F & G à l'egard du point M, & $\frac{M}{a} \int dx \int P\,dx$ eſt la ſomme de tous les momens des forces élémentaires à l'egard du même point M.

XII. Que l'on conſidere à préſent la courbe AMB, que la corde forme dans ce moment, dont la nature ſera exprimée par les formules données ci-deſſus, ſi le tems t eſt pris conſtant, ou $dt = o$, & par conſéquent on aura $dy = p\,dx$, & $dp = r\,dx$. Par là l'equation que l'etat d'équilibre a fait trouver, étant differentiée, & en poſant $p\,dx$, au lieu de dy, donnera diviſée par dx

$$Fp - G + \frac{M}{a} \int P\,dx = o.$$

Qu'on differentie de nouveau cette équation, en poſant $r\,dx$ pour dp, & en diviſant par dx, on obtiendra $Fr + \frac{M}{a} P = o$; d'où l'on tire la force accélératrice P du point M ſuivant la direction MP,

MP, ſavoir $P = -\frac{Far}{M}$. C'eſt pourquoi ſi la courbe AMB étoit connuë, on pourroit déterminer par ſa nature la force accélératrice de chacun des élémens.

XIII. Conſiderons à préſent le mouvement du ſeul point M, par lequel il s'approche de P, étant ſollicité par la force accélératrice P, & l'abſciſſe $AP = x$ doit être cenſée invariable. Or comme à cauſe de $dx = o$, il y a l'increment momentané de l'appliquée PM, $dy = q\,dt$ & $dq = u\,dt$, dans le petit tems dt le point M s'approche de P par le petit eſpace $= -q\,dt$, dont le differentiel en poſant l'element du tems dt, conſtant, ſera $= -dq\,dt = -u\,dt^2 = -ddy$. Mais, de l'accelération qui naît de la force P par les principes mecaniques on déduit cette équation $P = -\frac{2\,ddy}{dt^2} = -2u$, ſi l'on expoſe, comme c'eſt la coutume l'elément du tems dt par l'elément de l'eſpace appliqué à la viteſſe, & que la viteſſe elle même ſoit répreſentée par la racine quarrée de la hauteur duë à cette viteſſe. Ainſi, puisque nous avons trouvé $P = -\frac{Far}{M}$ auſſi bien que $P = -2u$, il en réſultera $2u = \frac{Far}{M}$ ou $u = \frac{Far}{2M}$.

XIV. Ces deux conditions, que nous avons rappellées au calcul, renferment toute la Queſtion propoſée; & par conſéquent, ſi un tems quelconque t étant ecoulé, on poſe pour un point quelconque M de la corde l'abſciſſe $AP = x$, & l'appliquée $PM = y$, celle-ci s'exprimera par une fonction de x & t, telle qu'en poſant $dy = p\,dx + q\,dt$, le caractere des fonctions p & q ſe tirera de ces formules

$$dp = r\,dx + s\,dt, \text{ \& } dq = s\,dx + \frac{F'a}{2M}\,r\,dt.$$

La queſtion mecanique propoſée ſe réduit donc à ce problême analytique, de chercher des fonctions r & s de x & t, telles que

ces formules differentielles $rdx + sdt$, & $sdx + \frac{2M}{Fa} rdt$, deviennent intégrables. Car de femblables fonctions étant trouvées pour r & s, on pourra aſſigner les valeurs $p = \int (rdx + sdt)$ & $q = \int (sdx + \frac{Fa}{2M} rdt,)$ d'où l'on inferera enſuite la valeur de l'appliquée même $y = \int (pdx + qdt.)$

XV. Ce Problême analytique conſideré en ſoi eſt extrémement indéterminé; ainſi, pour l'accommoder à quelque cas qui ſe préſenteroit, il faut faire les remarques ſuivantes. Premierement dans les intégrations, il faut régler les conſtantes de maniere qu'en poſant $x = o$, quelle que ſoit la valeur qu'on attribuë à t, on ait toujours $y = o$. Enſuite, on doit en faire autant dans le cas de $x = a$. Troiſiémement, ces précautions étant priſes, d'entre les fonctions infinies r & s, qui ſatisfont aux conditions ci-deſſus exprimées; on doit pour chaque cas propoſé choiſir celles, qui en poſant $t = o$, font que la valeur de l'appliquée y qui en réſulte, fournit cette courbure arbitraire, que l'on avoit donnée à la corde au commencement du mouvement. Cela étant executé, il ne reſtera plus dans la ſolution aucune conſtante indéterminée, & le vrai mouvement de la corde pourra être repreſenté d'une maniere abſoluë.

XVI. Afin donc que la figure initiale de la corde puiſſe être réglée arbitrairement, la ſolution doit avoir la plus grande étenduë. C'eſt pourquoi, la recherche devant commencer par ces formules $dp = rdx + sdt$, & $dq = sdx + \frac{Fa}{2M} rdt$, on doit découvrir en général toutes les valeurs poſſibles pour r & s, qui rendent ces formules intégrables enſemble. Multiplions pour cet effet ces formules à part par les conſtantes m & n, & ajoutons les produits, de maniere que ſoit

$$mdp + ndq = dx\,(mr + ns) + dt\,(ms + \frac{Fa}{2M} nr)$$

cette

cette formule doit être encore intégrable, quelles que ſoient les valeurs conſtantes attribuées aux lettres m & n. Qu'on faſſe donc $m:n = \frac{Fa}{2M}\, n:m$, ou $mm = \frac{Fa}{2M}\, nn$, d'où vient $m = 1$ & $n = \pm \sqrt{\frac{2M}{Fa}}$, & l'on aura $dp \pm dq \sqrt{\frac{2M}{Fa}} = (dx \pm dt \sqrt{\frac{Fa}{2M}})(r \pm s \sqrt{\frac{2M}{Fa}})$.

XVII. Pour abréger, ſoit $\frac{Fa}{2M} = b$, & l'on aura $dp \pm dq \sqrt{\frac{1}{b}} = (dx \pm dt \sqrt{b})(r \pm s \sqrt{\frac{1}{b}})$ ou $dp \sqrt{b} \pm dq = (dx \pm dt \sqrt{b})(r \sqrt{b} \pm s)$ ou auſſi $dq \pm dp \sqrt{b} = (dx \pm dt \sqrt{b})(s \pm r \sqrt{b})$.
Comme donc cette formule $(dx \pm dt \sqrt{b})(s \pm r \sqrt{b})$ doit être intégrable, il eſt néceſſaire que $s \pm r \sqrt{b}$ ſoit une fonction de $x \pm t \sqrt{b}$. Poſons, pour tenir compte de l'un & de l'autre ſigne

$$x + t\sqrt{b} = v \qquad x = \frac{v+u}{2}$$
$$\text{& il ſera}$$
$$x - t\sqrt{b} = u \qquad t\sqrt{b} = \frac{v-u}{2}$$

& nous aurons ces équations :
$dq + dp\sqrt{b} = dv\,(s + r\sqrt{b})$ & $dq - dp\sqrt{b} = du\,(s - r\sqrt{b})$
où il faut que $s + r\sqrt{b}$ ſoit une fonction de v, & $s - r\sqrt{b}$ une fonction de u ; car autrement l'intégration ne reüſſiroit pas.

XVIII. Cette double intégration étant donc faite, $q + p\sqrt{b}$ deviendra = à une fonction de v, & $q - p\sqrt{b} =$ à une fonction de u. Soit donc, pour donner une pleine etenduë à la ſolution,

V fonction quelconque de $v = x + t\sqrt{b}$.
U fonction quelconque de $u = x - t\sqrt{b}$,
& l'on ſatisfera aux conditions rapportées, en poſant

$$q + p\sqrt{b} = V \qquad q = \frac{V + U}{2}$$

d'où ſe fait

$$q - p\sqrt{b} = U \qquad p = \frac{V - U}{2\sqrt{b}}.$$

Comme donc $dy = p\,dx + q\,dt$, on aura en ſubſtituant à p & q, de même qu'à dx & dt les valeurs trouvées

$$dy = \frac{(dv + du)(V - U)}{4\sqrt{b}} + \frac{(dv - du)(V + U)}{4\sqrt{b}},$$

qui aprés l'evolution fournit

$$dy = \frac{V\,dv - U\,du}{2\sqrt{b}} \text{ \& } y = \frac{1}{2\sqrt{b}}(\int V\,dv - \int U\,du).$$

XIX. Or $\int V\,dv$ ſera fonction de $v = x + t\sqrt{b}$, & $\int U\,du$ fonction de $u = x - t\sqrt{b}$, b etant $= \frac{F}{2M}\frac{a}{}$; d'où, ſi l'on employe les caracteres f & φ pour indiquer des fonctions quelconques des quantités, devant leſquelles on les met, nous aurons l'expreſſion générale ſuivante pour l'appliquée y, qui repréſente ſa quantité pour un tems quelconque t, ecoulé depuis le commencement, & pour une abſciſſe quelconque x

$$y = f:(x + t\sqrt{b}) + \varphi:(x - t\sqrt{b}).$$

Car pour retourner ſur nos pas, & faire un eſſai ſur la formule $dy = p\,dx + q\,dt$ on aura les valeurs ſuivantes p & q:

$$p = f':(x + t\sqrt{b}) + \varphi':(x - t\sqrt{b})$$
$$q = \sqrt{b}\,(f':(x + t\sqrt{b}) - \varphi':(x - t\sqrt{b}))$$

& au lieu des formules $dp = r\,dx + s\,dt$ & $dq = s\,dx + b\,r\,dt$, on aura, comme la nature de la choſe le demande,

$$r = f''.(x + t\sqrt{b}) + \varphi''.(x - t\sqrt{b})$$
$$r = \sqrt{b}.(f''.(x + t\sqrt{b}) - \varphi''.(x - t\sqrt{b}))$$

pourvu

pourvu que nous marquions le differentiel de la fonction $f: z$ par $dz f': z$, & le differentiel de la fonction $f': z$ par $dz f'': z$.

XX. Jusqu'à preſent les caracteres f & φ, dans l'equation

$$y = f: (x + t \vee b) + \varphi: (x - t \vee b)$$

ſignifient des fonctions quelconques, qui different en raiſon de la compoſition, & leur relation ſe determine davantage par les autres conditions. Car comme en poſant $x = o$, on doit toujours avoir $y = o$, il doit etre $f: (+ t \vee b) + \varphi\ (- t \vee b) = o$, & par conſequent $\varphi\ (- t \vee b) = - f: (t \vee b)$. Or alors, parce qu'en poſant $x = a$, la valeur de y doit pareillement evanoüir, on aura auſſi $f: (a + t \vee b) + \varphi: (a - t \vee b) = o$; & ainſi la nature des fonctions f & φ doit etre définie de maniere qu'elle ſatisfaſſe à ces conditions.

$$\varphi: - t \vee b = - f: t \vee b$$
$$\varphi: (a - t \vee b) = - f: (a + t \vee b)$$

XXI. Comme $f: z$ peut être repreſenté en général par l'appliquée d'une certaine courbe, dont l'abſciſſe eſt z, ſoit A M B la courbe dont les appliquées P M fourniſſent les fonctions des abſciſſes A P qui ſont déſignées par le caractere $f:$ en ſorte que P M ſoit $= f: t \vee b$; auquel $\varphi: - t \vee b$ devant être negativement égal, qu'on prenne A p = A P, de ſorte que A p $= t \vee b$; & en poſant la courbe Amb au deſſous de l'axe de la courbe ſemblable A M B, on aura pm $= - f: t \vee b = \varphi: - t \vee b$. Donc la courbe Amb ſemblable à la courbe AMB expoſera la nature de l'autre fonction φ. Alors la courbe AMB exiſtant d'une maniere ſemblable au delà de B, ſoit AB $= a$ continué au deſſous de l'axe, afin que la portion B N a ſoit ſemblable & égale à la courbe B n A, & en prenant B Q = B q, on aura A Q $= a + t \vee b$, Q N $= f: (a + t \vee b)$, & pareillement à cauſe de Aq $= a - t \vee b$, il ſera qn $= f: (a - t \vee b)$ d'où il paroit qu'une courbe de cette forme A M B, qui eſt continuée de part & d'autre à l'infini par des parties ſemblables & égales à elle même Am b, BNa, & qui ſoient ſituées alternativement en haut & en bas, eſt propre à repréſenter la nature de l'une & l'autre fonction f & φ. Fig. 2.

XXII. Ayant

XXII. Ayant donc décrit une ſemblable courbe anguiforme, ſoit réguliere, contenüe dans une certaine équation, ſoit irreguliere, ou méchanique, ſon appliquée quelconque PM fournira les fonctions, dont nous avons beſoin pour la ſolution du Problême. En effet ſi l'on poſe une abſciſſe quelconque AP $= z$, on aura l'appliquée PM $= f: z$. De là donc, en attribuant à l'abſciſſe z, les valeurs $x + t\sqrt{b}$ & $x - t\sqrt{b}$, on aura $y = f: (x + t\sqrt{b}) + f: (x - t\sqrt{b})$; en conſéquence de quoi on pourra aſsigner pour un tems quelconque dans la corde vibrante l'appliquée y, qui convient pour une abſciſſe quelconque. Or poſons $t = o$, pour obtenir la courbe initiale de la corde, & l'on aura AP $= x$, & l'appliquée dans la corde vibrante $y = f: x = 2$ PM; ou, parce qu'il eſt permis de prendre les moitiés des fonctions ſuperieures, en ſorte que

$$y = \tfrac{1}{2} f: (x + t\sqrt{b}) + \tfrac{1}{2} f: (x - t\sqrt{b})$$

la courbe même AMB repréſentera la figure donnée à la corde au commencement du mouvement.

XXIII. Réciproquement donc, s'il y a une courbe donnée, ou figure, que la corde ait reçüe au commencement, on pourra en tirer la détermination de la figure de la corde pour un tems quelconque écoulé depuis le commencement. Car, en décrivant au deſſus de l'axe AB $= a$, qui ſoit égal à la longueur de la corde, la figure initiale de la corde AMB, qu'on la repete de part & d'autre en ſituation inverſe, en ſorte que Amb $=$ AMB & BNa $=$ BnA, & que l'on conçoive la répetition continuelle de cette courbe de part & d'autre à l'infini ſuivant la même loi. Alors, ſi cette courbe eſt employeé pour exprimer les fonctions trouvées, aprés un tems écoulé $= t$ l'appliqueé qui répondra à l'abſciſſe x, dans la corde en vibration ſera:

$$y = \tfrac{1}{2} f: (x + t\sqrt{b}) + \tfrac{1}{2} f: (x - t\sqrt{b})$$

d'où l'on pourra recueillir aiſément la conſtruction de la courbe, que la corde forme dans un tems quelconque.

XXIV. Mais afin que cette formule ne paroiſſe pas renfermer des quantités heterogenes, il faut remarquer que $t\sqrt{b}$ eſt répreſenté par une ligne droite, & eſt par conſéquent homogene à x. Car, ſoit z la

hauteur

hauteur de laquelle un corps pesant tombe dans le tems t, en donnant l'expression du tems de la maniere indiquée ci-dessus, on aura $t = 2\sqrt{z}$; & ainsi au lieu de t, on pourra écrire $2\sqrt{z}$, & réciproquement par la hauteur z on connoitra le tems t écoulé depuis le commencement du mouvement. Donc $t\sqrt{b}$ sera $= 2\sqrt{bz} = 2\sqrt{\frac{Faz}{2M}} = \sqrt{\frac{2Faz}{M}}$, & par conséquent sera exprimé par une ligne droite. Or posons, pour abréger, $\sqrt{\frac{2Faz}{M}} = v$, en sorte que la valeur de v puisse être assignée pour un tems quelconque, & aprés le tems écoulé, pendant lequel un corps pesant tombe par la hauteur $= z$, on aura

$$y = \tfrac{1}{2} f:(x+v) + \tfrac{1}{2} f:(x-v)$$

XXV. Si l'on a donc donné au commencement la figure AMB à la corde $AB = a$, & que sa répétition ait ensuite formé la ligne courbe anguiforme $n'bAMBaN$, la figure que la corde doit avoir au bout du tems t, pendant lequel un corps pesant tombe par la hauteur $= z$, sera ainsi définie. De cette hauteur z connüe qu'on cherche la valeur $v = \sqrt{\frac{2Faz}{M}}$, & qu'en proposant l'abscisse quelconque $AP = x$, on prenne de part & d'autre $PQ = Pq = v$, en menant aux points Q & q les appliquées QN & qn, on aura à cause de $QN = f:(x+v)$ & de $qn = f:(x-v)$, l'appliquée qui répond à l'abscisse $AP = x$ de la corde, $y = \frac{1}{2}QN + \frac{1}{2}qn$; ou bien, qu'on prenne $Pm = \frac{QN + qn}{2}$, m étant le lieu du point M, & si l'on employe cette construction pour tous les points de l'axe AB, les points m donneront la figure présente de la corde Am B. De cette maniere la figure, que la corde prend dans les vibrations, sera facilement décrite pour un tems quelconque.

XXVI. Cherchons la figure de la corde, aprés qu'il ſera écoulé un tems tel que v ſoit $= a$, ou $z = \frac{M\,a}{2\,F}$, & cela donnera

$$y = \tfrac{1}{2} f\!:(x+a) + \tfrac{1}{2} f\!:(x-a)$$

Or par la nature de la courbe décrite $f\!:(x+a)$ ſera $= -f\!:(a-x)$ & $f\!:(a+x) = -f\!:(a-x)$ d'où réſultera

$$y = -f\!:(a-x)$$

ce qui fait voir que la corde ſera plieé toute entiere au deſſous de l'axe, & prendra la figure AM'B égale à la figure donnée AMB, mais poſée en ſituation inverſe; de ſorte qu'en prenant l'abſciſſe BP' $=$ AP, l'appliquée ſera P'M' $=$ PM. Et de là réciproquement, s'il s'ecoule de nouveau un tems égal t, d'où réſulte $v = a$, toute la corde retournera à la ſituation AMB, qui lui avoit été donnée au commencement; ce qui ſe déduit auſsi de ce que s'etant écoulé depuis le commencement un tems, d'où ſe fait $v = 2\,a$, il en réſulte,

$$y = \tfrac{1}{2} f\!:(x+2a) + \tfrac{1}{2} f\!:(x-2a)$$

Mais en prenant PQ' $=$ Pq' $= 2\,a$, par la nature de la courbe Q'N' ſera $=$ PM $=$ q'n', & par conſéquent $y =$ PM, comme au commencement du mouvement.

XXVII. Quelle que ſoit donc la figure donnée d'abord à la corde, elle la reprend à chacune des vibrations, autant que le permet la diminution causée par la réſiſtance; ce qui fait voir bien clairement qu'il n'y a aucune vérité dans l'opinion rapportée ci-deſſus, ſavoir que les vibrations de la corde, quelque irreguliéres qu'elles ayent été d'abord, rentrent auſsi-tot aprés dans l'uniformité, de maniere que la figure dégénere en une trochöide prolongée. Cependant il n'eſt pas moins clair, que quelle que ſoit la figure de la corde en vibration, les vibrations ne laiſſeront pas d'etre aſſez régulieres; car comme, en poſant $v = 2\,a$, la corde retourne à ſon premier etat, elle doit etre cenſée avoir fait pendant ce tems là deux vibrations; & par conſéquent on définira de la valeur $v = a$ le tems d'une vibration, qui ſera égal au tems pendant lequel un corps peſant tombe par

la

la hauteur $\frac{M\,a}{2\,F}$; ou, ſi l'on exprime la longueur de la corde AB $= a$ en milliemes de pieds de Rhin, le tems d'une vibration exprimé en ſecondes ſera $= \frac{1}{125}\sqrt{\frac{M\,a}{2\,F}}$, où la corde ſera autant de vibrations à chaque ſeconde, que cette expreſſion $125\sqrt{\frac{2\,F}{M\,a}}$ contiendra d'unités, tout comme ſi la corde achevoit ſes vibrations ſuivant la loi d'uniformité décrite par *Taylor*.

XXVIII. Comme la figure AMB donnée au commencement à la corde, fournit ſa premiere & plus grande excurſion, de même une vibration étant achevée, la corde ſe trouvera dans l'autre excurſion la plus grande AM'B, que nous avons fait voir être égale à la premiere inverſe. Voyons donc à preſent, ſi dans le milieu du tems qu'emportent ces deux vibrations, la corde ſe tend d'une maniere parfaitement droite, & reprend la ſituation naturelle, ou non? Puiſque du tems d'une vibration naît $v = a$, poſons pour le moment du milieu $v = \frac{1}{2}\,a$, & l'on aura de la formule génerale

$$y = \tfrac{1}{2}\,f:(x + \tfrac{1}{2}\,a) + \tfrac{1}{2}\,f:(x - \tfrac{1}{2}\,a)$$

dont la valeur evanouïra, ſi $f:(\frac{1}{2}\,a - x)$ eſt $= f:(\frac{1}{2}\,a + x)$ c'eſt à dire, ſi la figure ADB donnée au commencement à la corde eſt telle qu'aux abciſſes $\frac{1}{2}\,a + x$ & $\frac{1}{2}\,a - x$ répondent des appliquées égales: ce qui arrive ſi l'appliquée CD dreſſée au point du milieu C de la longueur AB eſt un diametre de la courbe ADB, & que la partie DB ſoit ſemblable & égale à la partie DA. Toutes les fois donc que la courbe initiale a cette propriété, tout autant de fois la corde s'etend en ligne droite au milieu de chaque vibration; & comme cela peut arriver en nombre innombrable de manieres, il eſt manifeſte que cette condition elle-même ne requiert pas, que la corde prenne perpetuellement dans ſes vibrations la figure d'une trochoïde prolongée. Fig. 1.

XXIX. Or, bien qu'à conſiderer la choſe en général, les tems des vibrations ne dépendent pas de la figure que prend la corde vibrante,

Fig. 3. mais qu'ils ſe déterminent par les ſeules quantités a, M & F, dont la premiere a dénote la longueur de la corde, M le poids de la corde, & F le poids égal à la force qui tend ; cependant il y a des cas ſinguliers, dans leſquels les tems des vibrations peuvent être réduits à la moitié, au tiers, au quart, ou même à une partie aliquote quelconque de toute la longueur. Car, ſi toute la longueur de la corde étoit A a = a, & qu'elle ſe courbât au commencement, de maniere qu'elle fit deux parties AMB & B a, qui fuſſent parfaitement ſemblables & égales entr'elles, elle fera alors ſes vibrations, comme ſi elle n'avoit que la demie longueur AB, & par conſéquent ces vibrations ſeront deux fois plus rapides. De même, ſi la figure initiale de la corde avoit trois parties ſemblables & égales b AB a, comme elles ſont repréſentées dans la figure, la corde alors fera ſes vibrations, comme ſi ſa longueur étoit trois fois moindre, & chaque vibration deviendra trois fois plus courte ; par où l'on comprend aſſez, comment ces mêmes vibrations peuvent devenir quatre fois, cinq fois &c. plus courtes.

XXX. Ayant ainſi donné la ſolution générale, comprenons y encore quelques cas, auxquels la courbe anguiforme Fig. 3. eſt une courbe continuë, dont les parties ſoient liées en vertu de la loi de de continuité, de maniere que ſa nature puiſſe être compriſe par une équation. Et d'abord il eſt conſtant, que ces courbes, puiſqu'elles ſont coupées par l'axe en une infinité de points, ſeront tranſcendentes. En poſant la longueur de la corde AB = a, & une abſciſſe quelconque AB = u, ſoit $1 : \pi$, comme le diametre du cercle à la circonference, & il eſt manifeſte que l'equation ſuivante, exprimée par les ſinus, fournit une courbe requiſe ;

$$PM = \alpha \sin \frac{\pi u}{a} + \beta \sin \frac{2\pi u}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi u}{a} + \delta \sin \frac{4\pi u}{a} + \&c.$$

Car ſi, au lieu de u, on poſe ou a, ou $2a$, ou $3a$, ou $4a$ &c. l'appliquée PM evanoüit, & en poſant u negatif, l'appliquée elle même ſe change en ſon négatif. Si donc la courbe AMB étoit la figure primitive de la corde, au bout du tems t, pendant lequel le corps peſant

ſant deſcend par la hauteur $= z$, en poſant $v = V \frac{2Fgz}{M}$, à l'abſciſſe x dans la figure de la corde répondra l'appliquée y, de ſorte qu'on aura :

$$y = + \tfrac{1}{2}\alpha \sin \frac{\pi}{a}(x+v) + \tfrac{1}{2} b \sin \frac{2\pi}{a}(x+v) + \tfrac{1}{2}\gamma \sin \frac{3\pi}{a}(x+v) \text{ &c.}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\alpha \sin \frac{\pi}{a}(x-v) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{G} \sin \frac{2\pi}{a}(x-v) + \tfrac{1}{2}\gamma \sin \frac{3\pi}{a}(x-v) \text{ &c.}$$

XXXI. Or comme $\sin(a+b) + \sin(a-b)$ eſt $= 2 \sin a \cos b$, cette équation ſe transformera en cette forme :

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi v}{a} + \mathfrak{G} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi v}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{3\pi v}{a} \text{ &c.}$$

& la figure primitive de la corde ſera exprimée par cette équation,

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \mathfrak{G} \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \text{ &c.}$$

laquelle revient la même, toutes les fois que v devient ou $2a$, ou $4a$, ou $6a$ &c. Mais ſi v eſt ou a, ou $3a$, ou $5a$ &c. la figure de la corde ſera

$$y = -\alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \mathfrak{G} \sin \frac{2\pi x}{a} - \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \text{ &c.}$$

où il faut remarquer que ſi β eſt $= o$, $\gamma = o$, $\delta = o$, &c. il en réſulte le cas qu'on croit communément être le ſeul qui ait lieu dans la vibration des cordes, ſavoir $y = \alpha$ ſi $\frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi v}{a}$, dans lequel la courbure de la corde eſt perpetuellement la ligne des ſinus, ou une trochoïde prolongée à l'infini. Mais ſi le ſeul terme β, ou γ, ou δ, &c. s'y trouve, cela forme des cas où le tems de la vibration eſt moindre, ou du double, ou du triple, ou du quadruple &c.

Fig. 1.

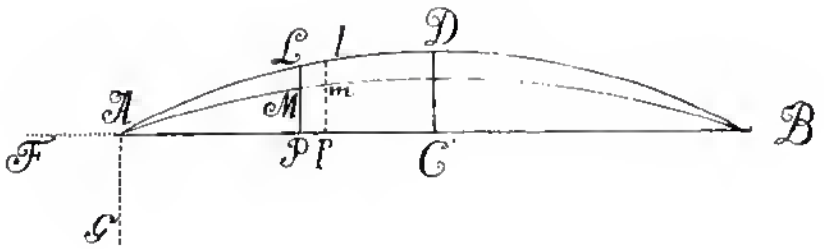


Fig. 2.

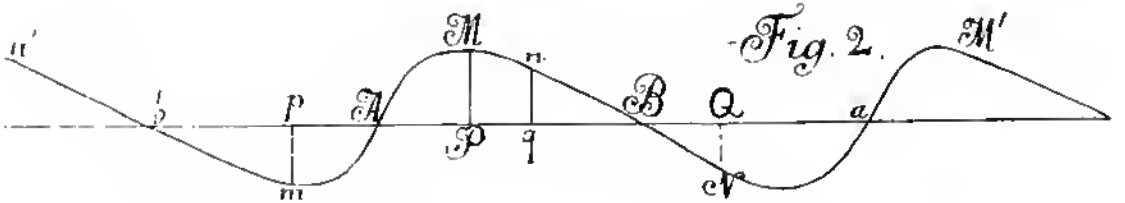
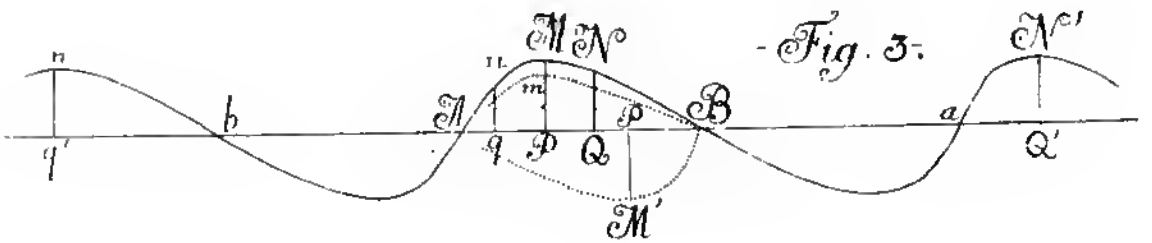


Fig. 3.



Mem: de l'Acad: T. IV. ad p. 71.